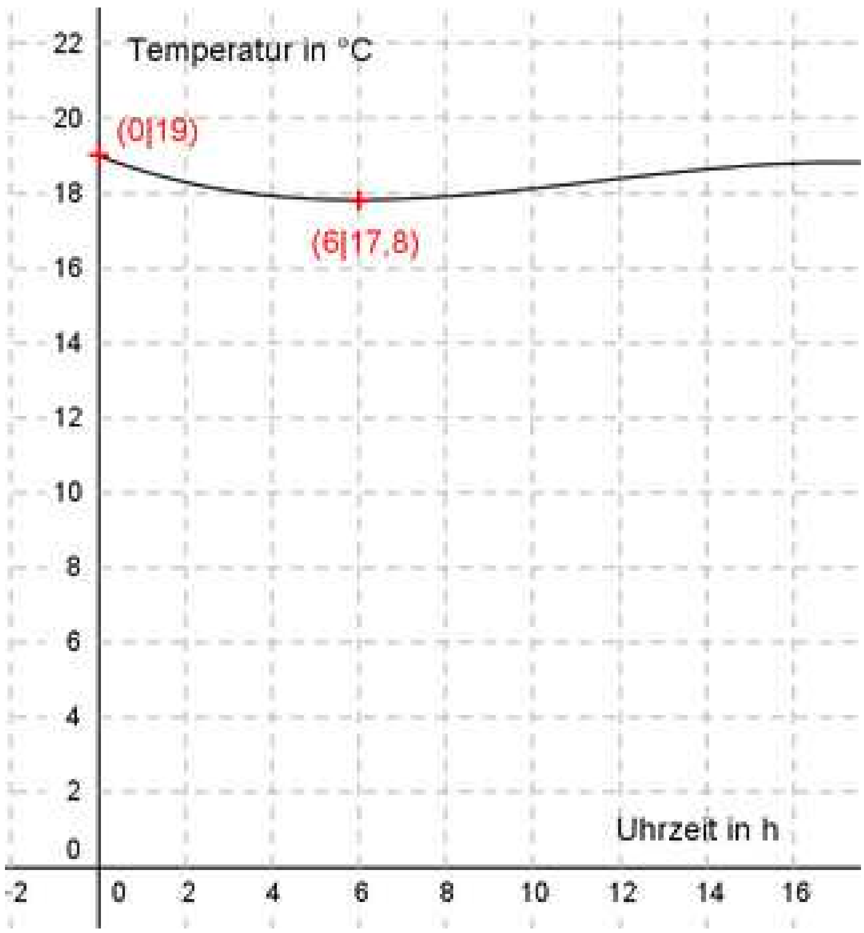
Steckbriefaufgaben Aufgabe 129

Die Veränderung der Oberflächentemperatur eines Teiches während eines Tages kann nach langjähriger Beobachtung durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschrieben werden. Messungen ergaben: Um 0.00 Uhr waren es 19°, um 6.00 war sie am niedrigsten mit 17,8° und um 17.00 war sie am höchsten. Zu welchem Zeitpunkt ist sie am stärksten gestiegen?



Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

4 Bedingungen:

1. Um 0.00 Uhr waren es 19° bedeutet:

$f(0) = 19 \dashrightarrow a * 0^3 + b * 0^2 + c * 0 + d = 19 \dashrightarrow d = 19$

2. Um 6.00 Uhr war sie am niedrigsten mit 17,8° bedeutet zum einen:
(d = 19 eingesetzt)

$f(6) = 17{,}8 \rightarrow a * 6^3 + b * 6^2 + c * 6 + 19 = 17{,}8 \rightarrow$

$216a + 36b + 6c + 19 = 17{,}8 \mid -19$

$216a + 36b + 6c = -1{,}2 \qquad \text{I}$

3. Um 6.00 Uhr war sie am niedrigsten mit 17,8° bedeutet zum anderen:

$f'(6) = 0 \rightarrow 3a * 6^2 + 2b * 6 + c = 0 \rightarrow 108a + 12b + c = 0 \qquad \text{II}$

4. Um 17.00 Uhr war sie am höchsten:

$f'(17) = 0 \rightarrow 3a * 17^2 + 2b * 17 + c = 0 \rightarrow 867a + 34b + c = 0 \qquad \text{III}$

II * (-1) + III

$$\begin{array}{l} -108a - 12b - c = 0 \\ \underline{867a + 34b + c = 0} \\ \quad 759a + 22b = 0 \qquad \text{IV} \end{array}$$

I + II * (-6)

$$\begin{array}{l} 216a + 36b + 6c = -1{,}2 \\ \underline{-648a - 72b - 6c = 0} \\ \quad -432a - 36b = -1{,}2 \qquad \text{V} \end{array}$$

IV * 36 + V * 22

$$\begin{array}{l} 27324a + 792b = 0 \\ \underline{-9504a - 792b = -26{,}4} \\ \quad 17820a = -26{,}4 \mid :17820 \end{array}$$

$a = -0{,}00148$

a = - 0,00148 in IV eingesetzt:

$759 * (-0{,}00148) + 22b = 0$

$-1{,}123 + 22b = 0 \mid +1{,}123$

$22b = 1{,}123 \mid :22$

$b = 0{,}051$

a = - 0,00148 und b = 0,051 in I eingesetzt:

$216a + 36b + 6c = - 1,2$

$216 * (- 0,00148) + 36 * 0,051 + 6c = - 1,2$

$- 0,32 + 1,836 + 6c = - 1,2$

$1,516 + 6c = - 1,2 \mid - 1,516$

$6c = - 2,716 \mid :6$

$c = - 0,453$

$f(x\ ) = - 0,00148x^3 + 0,051x^2 - 0,453x + 19$

Will man wissen, wann der stärkste Temperaturanstieg ist, braucht man die Tangenstensteigung $f'(x)$ und zwar deren Maximum.

$f'(x) = - 0,00444x^2 + 0,102x - 0,453$

Zur Bestimmung des Extremwertes die erste Ableitung von $f'(x)$ (= zweite Ableitung der Ursprungsfunktion) gleich Null setzen --> Der Extremwert dieser ersten Ableitung = Wendepunkt der Ursprungsfunktion.

$f''(x) = - 0,00888x + 0,102 \mid - 0,0102$

$0,00888x = - 0,102 \mid : -0,00888$

$x = 11,5$ h --> 11.30 Uhr

$f'''(x) = - 0,00888$ ist negativ --> ein Maximum liegt vor.