Steckbriefaufgaben Aufgabe 133

Für eine ganzrationale Kostenfunktion 3. Grades gelten folgende betriebliche Bedingungen: Ein Bauteil kostet in der Herstellung 90 GE, die variablen Kosten für 2 Bauteile betragen 56 GE, die Grenzkosten betragen 27 GE pro Bauteil und das Minimum der Grenzkosten liegt bei 8/3 Bauteilen. Jedes Bauteil wird für 90 GE verkauft.
a) Wie hoch ist das Gewinnmaximum?
b) Bei wieviel ME liegt das Betriebsminimum?

a)

Allgemeine Form einer ganzrationalen Kostenfunktion 3. Grades:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$K''(x) = 6ax + 2b$

$K_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

4 Bedingungen:

1. Ein Bauteil kostet in der Herstellung 90 GE bedeutet:

$K(1) = 90 \dashrightarrow a * 1^3 + b * 1^2 + c * 1 + d = 90 \dashrightarrow$

$a + b + c + d = 90 \qquad \text{I}$

2. Die variablen Kosten $K_v(x)$ für 2 Bauteile betragen 56 GE bedeutet:

$K_v(2) = 56 \dashrightarrow a * 2^3 + b * 2^2 + c * 2 = 56 \dashrightarrow 8a + 4b + 2c = 56 \qquad \text{II}$

3. Die Grenzkosten betragen 27 GE pro Bauteil bedeutet:

$K'(1) = 27 \dashrightarrow 3a * 1^2 + 2b * 1 + c = 27 \dashrightarrow 3a + 2b + c = 27 \qquad \text{III}$

4. Das Minimum der Grenzkosten liegt bei 8/3 Bauteilen bedeutet:
($K''(x)$ ist die erste Ableitung von $K'(x)$)

$K''(8/3) = 0 \dashrightarrow 6a * 8/3 + 2b = 0 \dashrightarrow 16a + 2b = 0 \qquad \text{IV}$

III * (-2) + II

$$\begin{array}{r} -6a - 4b - 2c = -54 \\ \underline{8a + 4b + 2c = 56} \\ 2a = 2 \mid :2 \end{array}$$

$a = 1$

$a = 1$ in IV eingesetzt:

$16 * 1 + 2b = 0 \mid -16$

$2b = -16 \mid :2$

$b = -8$

$a = 1$ und $b = -8$ in II eingesetzt:

$8 * 1 + 4 * (-8) + 2c = 56$

$8 - 32 + 2c = 56$

$-24 + 2c = 56 \mid +24$

$2c = 80 \mid :2$

$c = 40$

$a = 1$ und $b = -8$ und $c = 40$ in I eingesetzt:

$1 - 8 + 40 + d = 90$

$33 + d = 90 \mid -33$

$d = 57$

Gesuchte Kostenfunktion:

$\mathbf{K(x) = x^3 - 8x^2 + 40x + 57}$

Erlösfunktion $\mathbf{E(x) = 90x}$:

Gewinnfunktion:

$G(x) = E(x) - K(x) = 90x - (x^3 - 8x^2 + 40x + 57)$

$G(x) = 90x - x^3 + 8x^2 - 40x - 57$

$G(x) = -x^3 + 8x^2 + 50x - 57$

Für das Maximum gilt:

$G'(x) = 0$

$G'(x) = - 3x^2 + 16x + 50 = 0$

A, B, C - Formel:

A = - 3, B = 16, C = 50

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 * (-3) * 50}}{2 * (-3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 600}}{-6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{856}}{-6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 29,26}{-6}$$

$x_1 = \frac{13,26}{-6}$ = < 0 keine Lösung, negative ME

$x_2 = \frac{-45,26}{-6}$ = 7,5 ME gerundet

$G''(x) = - 6x + 16$

$G''(7,5) = - 6 * 7,5 + 16 = - 45 + 16 = - 29 < 0$ --> Maximum

$G_{max} = G(7,5) = - 7,5^3 + 8 * 7,5^2 + 50 * 7,5 - 57 = 346$ GE gerundet

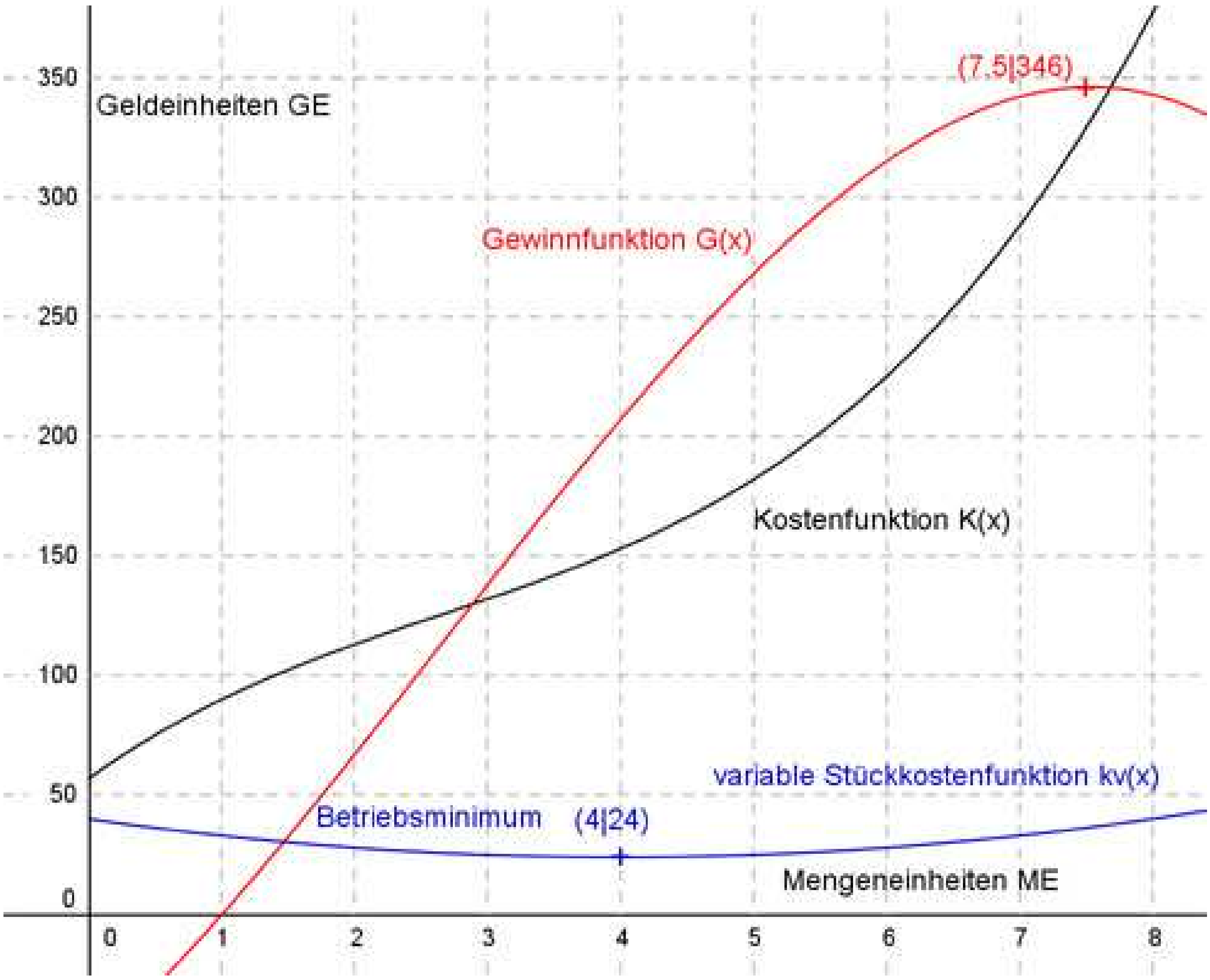
b) Betriebsminimum --> $k_v'(x) = 0$

$$kv(x) = \frac{Kv(x)}{x} = \frac{x^3 - 8x^2 + 40x}{x} = x^2 - 8x + 40$$

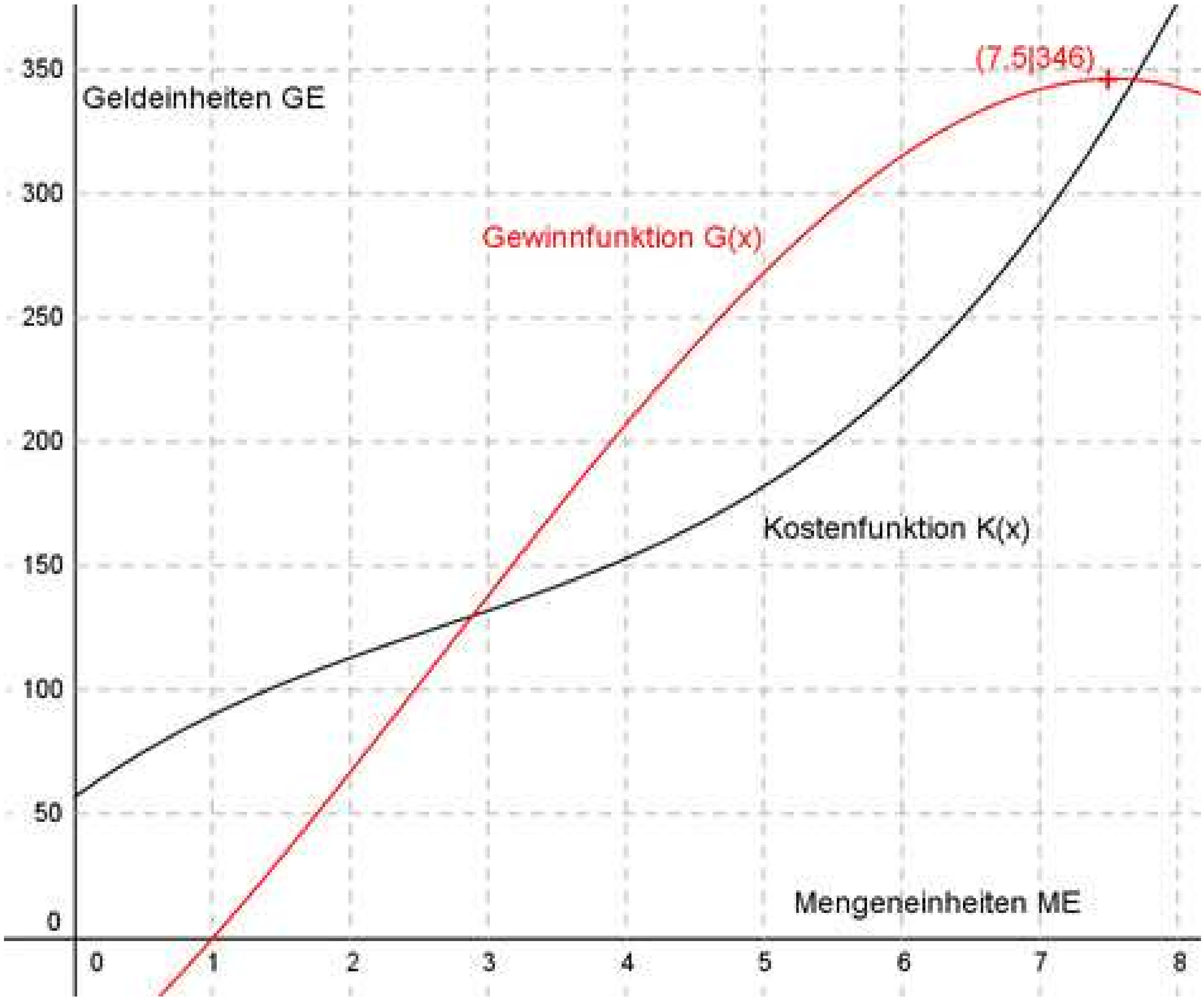
$k_v'(x) = 2x - 8 = 0 \mid +8$

$2x = 8 \mid :2$

x = 4 ME



Geldeinheiten GE
Gewinnfunktion G(x)
(7,5|346)
Kostenfunktion K(x)
variable Stückkostenfunktion kv(x)
Betriebsminimum
(4|24)
Mengeneinheiten ME
350
300
250
200
150
100
50
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8


Geldeinheiten GE
(7,5|346)
Gewinnfunktion G(x)
Kostenfunktion K(x)
Mengeneinheiten ME
350
300
250
200
150
100
50
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8