

Steckbriefaufgaben Aufgabe 147

Ein Einproduktunternehmen geht von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion aus. Die Fixkosten betragen 40 GE, bei der Herstellung von 1 ME entstehen Kosten von 62 GE, bei 3 ME sind es 100 GE, und bei 5 ME entstehen 170 GE. Wie hoch sind die variablen Stückkosten beim Betriebsminimum?

Allgemeine Form einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion 3. Grades:

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$K''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Die Fixkosten betragen 40 GE bedeutet:

$$K(0) = 40 \rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 40 \rightarrow d = 40$$

2. Bei der Herstellung von 1 ME entstehen Kosten von 62 GE bedeutet:
(d = 40 eingesetzt)

$$K(1) = 62 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 40 = 62 \rightarrow$$

$$a + b + c + 40 = 62 \quad | -40$$

$$a + b + c = 22 \quad \text{I}$$

3. Bei 3 ME sind es 100 GE bedeutet: (d = 40 eingesetzt)

$$K(3) = 100 \rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + 40 = 100 \rightarrow$$

$$27a + 9b + 3c + 40 = 100 \quad | -40$$

$$27a + 9b + 3c = 60 \quad \text{II}$$

4. Und bei 5 ME entstehen 170 GE bedeutet: (d = 40 eingesetzt)

$$K(5) = 170 \rightarrow a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + 40 = 170 \rightarrow$$

$$125a + 25b + 5c + 40 = 170 \quad | -40$$

$$125a + 25b + 5c = 130 \quad \text{III}$$

$$\text{I} \cdot (-3) + \text{II}$$

$$\begin{array}{r}
 -3a - 3b - 3c = -66 \\
 \underline{27a + 9b + 3c = 60} \\
 24a + 6b = -6 \quad \text{IV}
 \end{array}$$

$$I * (-5) + III$$

$$\begin{array}{r}
 -5a - 5b - 5c = -110 \\
 \underline{125a + 25b + 5c = 130} \\
 120a + 20b = 20 \quad \text{V}
 \end{array}$$

$$IV * (-10) + V * 3$$

$$\begin{array}{r}
 -240a - 60b = 60 \\
 \underline{360a + 60b = 60} \\
 120a = 120 \quad | :120
 \end{array}$$

$$a = 1$$

a = 1 in IV eingesetzt:

$$24 * 1 + 6b = -6 \quad | -24$$

$$6b = -30 \quad | :6$$

$$b = -5$$

a = 1 und b = -5 in I eingesetzt:

$$1 - 5 + c = 22$$

$$-4 + c = 22 \quad | +4$$

$$c = 26$$

Gesuchte Kostenfunktion:

$$\mathbf{K(x) = x^3 - 5x^2 + 26x + 40}$$

Bedingung für das Betriebsminimum: $k_v'(x) = 0$

$$K_v(x) = x^3 - 5x^2 + 26x$$

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{x^3 - 5x^2 + 26x}{x} = x^2 - 5x + 26$$

$$k_v'(x) = 2x - 5 = 0 \quad | +5$$

$$2x = 5 \quad | :2$$

$$x = 2,5 \text{ ME}$$

$$k_v''(2,5) = 2 > 0 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$k_v(2,5) = 2,5^2 - 5 * 2,5 + 26 = 6,25 - 12,5 + 26 = 19,75 \text{ GE}$$

Das Betriebsminimum tritt bei 2,5 ME und 19,75 GE auf.

