Steckbriefaufgaben Aufgabe 21

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt, hat im Wendepunkt eine Steigung von - 3, und der Hochpunkt liegt auf einer Höhe von y = 2. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Punktsymmetrisch zum Nullpunkt (0|0) bedeutet, die allgemeine Form der Funktion ändert sich zu:

$f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Exponenten von x)

$f'(x) = 3ax^2 + c$

$f''(x) = 6ax$

3 Bedingungen:

1. Punktsymmetrisch zum Nullpunkt (0|0) bedeutet, dort liegt der Wendepunkt des Graphen.
Hat im Wendepunkt eine Steigung von - 3 bedeutet:

$f'(0) = -3 \text{ --> } 3a * 0^2 + c = -3 \text{ --> } c = -3$

c = - 3 in die erste Ableitung eingesetzt, um x zu berechnen:

$3ax^2 - 3 = 0 \mid +3$

$3ax^2 = 3 \mid :3a$

$$x^2 = \frac{3}{3a} = \frac{1}{a}$$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}\ \pm$

2. Der Hochpunkt liegt auf einer Höhe von y = 2 bedeutet: Der Hochpunkt hat die Koordinaten (x|2), also $f(\pm\sqrt{\frac{1}{a}}) = 2$

1. Fall $f(\sqrt{\frac{1}{a}}) = 2$:

$f(\sqrt{\frac{1}{a}}) = a * (\sqrt{\frac{1}{a}})^3 - 3 * \sqrt{\frac{1}{a}} = 2$

$a * (1/a) \sqrt{\frac{1}{a}} - 3 * \sqrt{\frac{1}{a}} = 2$

$\sqrt{\frac{1}{a}} - 3 * \sqrt{\frac{1}{a}} = 2$

$- 2 * \sqrt{\frac{1}{a}} = 2 \mid :(-2)$

$\sqrt{\frac{1}{a}} = - 1 \mid^2$

$\frac{1}{a} = 1 \mid *a$

$a = 1$

2. Fall $f(-\sqrt{\frac{1}{a}}) = 2$:

$f(-\sqrt{\frac{1}{a}}) = a * (-\sqrt{\frac{1}{a}})^3 - 3 * (-\sqrt{\frac{1}{a}}) = 2$

$a * (1/a) (-\sqrt{\frac{1}{a}}) + 3 * \sqrt{\frac{1}{a}} = 2$

$- \sqrt{\frac{1}{a}} + 3 * \sqrt{\frac{1}{a}} = 2$

$2 * \sqrt{\frac{1}{a}} = 2 \mid :2$

$\sqrt{\frac{1}{a}} = 1 \mid^2$

$\frac{1}{a} = 1 \mid *a$

$a = 1$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$f(x) = x^3 - 3x$

Für einen Hochpunkt gilt:

$f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ | +3

$3x^2 = 3$ | :3

$x^2 = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 * 1 = 6 > 0$ --> Minimum

$f''(-1) = 6 * (-1) = - 6 < 0$ --> Maximum bei (-1|2)