Steckbriefaufgaben Aufgabe 27

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades tangiert an der Stelle x = 0 die x-Achse und hat in (2/3|- 16/27) einen Wendepunkt. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

4 Bedingungen:

1. Tangiert an der Stelle x = 0 die x-Achse bedeutet zum einen:

$f(0) = 0 \dashrightarrow a * 0^3 + b * 0^2 + c * 0 + d = 0 \dashrightarrow d = 0$

2. Tangiert an der Stelle x = 0 die x-Achse bedeutet zum anderen:

$f'(0) = 0 \dashrightarrow 3a * 0^3 + 2b * 0^2 + c = 0 \dashrightarrow c = 0$

3. Hat in (2/3|- 16/27) einen Wendepunkt bedeutet zum einen: (c = 0 und d = 0 eingesetzt):

$f(2/3) = 0 \dashrightarrow a * (2/3)^3 + b * (2/3)^2 = - 16/27 \dashrightarrow$

$(8/27)a + (4/9)b = - 16/27$

$(4/9)((2/3)a + b) = - 16/27 \mid :4/9$

$(2/3)\,a + b = - 4/3 \qquad \text{I}$

4. Hat in (2/3|- 16/27) einen Wendepunkt bedeutet zum anderen:

$f''(2/3) = 6a * (2/3) + 2b = 0 \dashrightarrow 4a + 2b = 0 \qquad \text{II}$

I * (-2) + II

$$\begin{array}{rcl} (-4/3)a - 2b & = & 8/3 \\ 4a + \quad 2b & = & 0 \\ \hline (8/3)a & = & 8/3 \mid :8/3 \\ a & = & 1 \end{array}$$

a = 1 in II eingesetzt:

$4 + 2b = 2 \mid -4$

$2b = -4 \mid :2$

$b = 2$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$f(x) = x^3 - 2x^2$