Steckbriefaufgaben Aufgabe 29

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Punkt (0|0), hat bei x = 3 einen Extremwert, und seine Normale im Wendepunkt (2/3|f(2/3) hat die Steigung 3/49. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer gabzrationalen Funktion 3. Grades:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

4 Bedingungen:

1. Geht durch den Punkt (0|0) bedeutet:

$f(0) = 0 \dashrightarrow a * 0^3 + b * 0^2 + c * 0 + d = 0 \dashrightarrow d = 0$

2. Hat bei x = 3 einen Extremwert bedeutet:

$f'(3) = 0 \dashrightarrow 3a * 3^2 + 2b * 3 + c = 0 \dashrightarrow 27a + 6b + c = 0 \qquad \text{I}$

3. Seine Normale im Wendepunkt (2/3|f(2/3) hat die Steigung 3/49 bedeutet zum einen:

$f''(2/3) = 0 \dashrightarrow 6a * 2/3 + 2b = 0 \dashrightarrow 4a + 2b = 0 \qquad \text{II}$

4. Seine Normale im Wendepunkt (2/3|f(2/3) hat die Steigung 3/49 bedeutet zum anderen:
Normale und Tangente im Wendepunkt stehen senkrecht aufeinander. Es gilt Steigung der Normalen m_N * Steigung der Tangente m_T = - 1.

$m_N * m_T = -1$

$3/49 * m_T = -1 \mid *49$

$3 * m_T = - 49 \mid :3$

$$m_T = -\frac{49}{3}$$

Steigung der Tangente = - 49/3 bedeutet:

$f'(2/3) = - 49/3 \dashrightarrow 3a * (2/3)^2 + 2b * (2/3) + c = - 49/3$

$(4/3)a + (4/3)b + c = -49/3 \mid *3$

$4a + 4b + 3c = -49$ III

III * (-1) + I * (3)

$$
\begin{array}{r}
-4a - 4b - 3c = 49 \\
\underline{81a + 18b + 3c = 0} \\
77a + 14b = 49 \quad \text{IV}
\end{array}
$$

II * (-7) + IV

$$
\begin{array}{r}
-28a - 14b = 0 \\
\underline{77a + 14b = 49} \\
49a = 49 \mid :49
\end{array}
$$

$a = 1$

a = 1 in II eingesetzt:

$4 * 1 + 2b = 0 \mid -4$

$2b = -4 \mid :2$

$b = -2$

a = 1 und b = - 2 in I eingesetzt:

$27 * 1 + 6 * (-2) + c = 0$

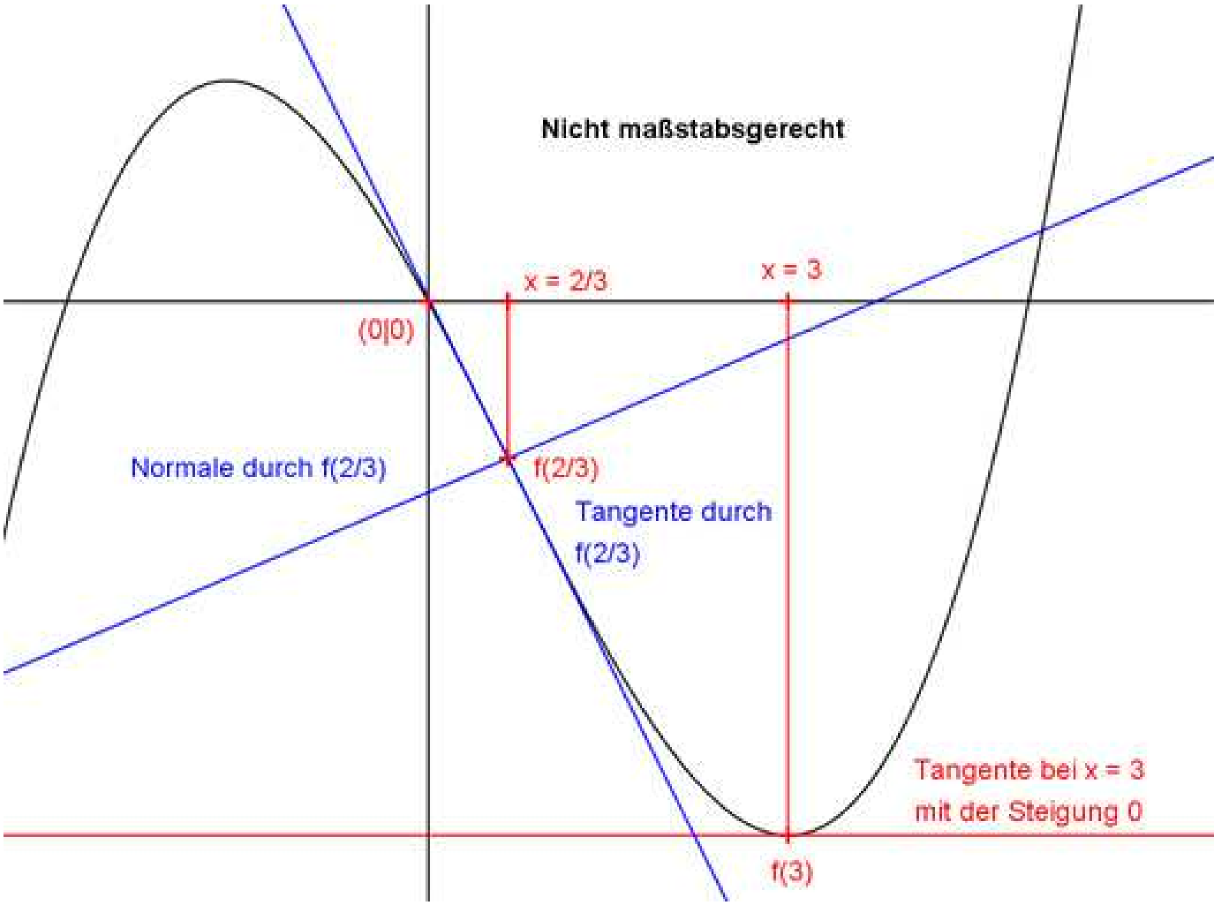
$27 - 12 + c = 0$

$15 + c = 0 \mid -15$

$c = -15$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$


Nicht maßstabsgerecht
x = 2/3
x = 3
(0|0)
Normale durch f(2/3)
f(2/3)
Tangente durch
f(2/3)
Tangente bei x = 3
mit der Steigung 0
f(3)