

Steckbriefaufgaben Aufgabe 33

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle, schneidet die y -Achse an der Stelle $y = 2$ und berührt die x -Achse an der Stelle $x = 2$. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Hat an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle bedeutet:

$$f(-1) = 0 \rightarrow a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 0 \rightarrow$$

$$-a + b - c + d = 0 \quad \text{I}$$

2. Schneidet die y -Achse an der Stelle $y = 2$ bedeutet:

$$f(0) = 2 \rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2 \rightarrow d = 2$$

3. Berührt die x -Achse an der Stelle $x = 2$ bedeutet zum einen: ($d = 2$ eingesetzt):

$$f(2) = 0 \rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 2 = 0 \rightarrow$$

$$8a + 4b + 2c + 2 = 0 \quad \text{II}$$

4. Berührt die x -Achse an der Stelle $x = 2$ bedeutet zum anderen:

$$f'(2) = 0 \rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \rightarrow 12a + 4b + c = 0 \quad \text{III}$$

I ($d = 2$ eingesetzt) + III

$$\begin{array}{r} -a + b - c + 2 = 0 \\ \underline{12a + 4b + c = 0} \\ 11a + 5b + 2 = 0 \quad | -2 \end{array}$$

$$11a + 5b = -2 \quad \text{IV}$$

$$\text{I} \cdot 2 + \text{II}$$

$$\begin{array}{r}
 -2a + 2b - 2c + 4 = 0 \\
 \underline{8a + 4b + 2c + 2 = 0} \\
 6a + 6b + 6 = 0 \quad | \quad -6
 \end{array}$$

$$6a + 6b = -6 \quad V$$

$$IV * 6 + V * (-5)$$

$$\begin{array}{r}
 66a + 30b = -12 \\
 \underline{-30a - 30b = 30} \\
 36a = 18 \quad | :36
 \end{array}$$

$$a = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$a = 1/2$ in V eingesetzt:

$$6 * (1/2) + 6b = -6$$

$$3 + 6b = -6 \quad | \quad -3$$

$$6b = -9 \quad | \quad :6$$

$$b = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$a = 1/2$ und $b = -3/2$ und $d = 2$ in I eingesetzt:

$$-1/2 - 3/2 - c + 2 = 0$$

$$-1/2 - 3/2 - c * 4/2 = 0$$

$$-c = 0 \quad | \quad :(-1)$$

$$c = 0$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2}$$

