

Steckbriefaufgaben Aufgabe 41

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt an der Stelle $x = 4$ die x-Achse, hat bei $x = 8/3$ einen Wendepunkt und eine Wendetangente mit der Steigung $-4/3$. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Berührt die x-Achse an der Stelle $x = 4$ bedeutet zum einen:

$$f(4) = 0 \rightarrow a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 0 \rightarrow$$

$$64a + 16b + 4c + d = 0 \quad \text{I}$$

2. Berührt die x-Achse an der Stelle $x = 4$ bedeutet zum anderen:

$$f'(4) = 0 \rightarrow 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c = 0 \rightarrow 48a + 8b + c = 0 \quad \text{II}$$

3. Hat bei $x = 8/3$ einen Wendepunkt bedeutet:

$$f''(8/3) = 0 \rightarrow 6a \cdot 8/3 + 2b = 0 \rightarrow 16a + 2b = 0 \quad \text{III}$$

4. Hat bei $x = 8/3$ eine Wendetangente mit der Steigung $-4/3$ bedeutet:

$$f'(8/3) = -4/3 \rightarrow 3a \cdot (8/3)^2 + 2b \cdot 8/3 + c = 0 \rightarrow$$

$$64/3 a + 16/3 b + c = -4/3 \quad | \cdot 3$$

$$64a + 16b + 3c = -4 \quad \text{IV}$$

$$\text{II} \cdot (-3) + \text{IV}$$

$$-144a - 24b - 3c = 0$$

$$\begin{array}{r} 64a + 16b + 3c = -4 \\ -144a - 24b - 3c = 0 \\ \hline -80a - 8b = -4 \quad \text{V} \end{array}$$

III * 5 + V

$$\begin{array}{r} 80a + 10b = 0 \\ - 80a - 8b = -4 \\ \hline 2b = -4 \quad | :2 \end{array}$$

$$b = -2$$

b = -2 in III eingesetzt:

$$16a + 2 * (-2) = 0$$

$$16a - 4 = 0 \quad | +4$$

$$16a = 4 \quad | :16$$

$$a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

a = 0,25 und b = -2 in II eingesetzt:

$$48 * 0,25 + 8 * (-2) + c = 0$$

$$12 - 16 + c = 0$$

$$-4 + c = 0 \quad | +4$$

$$c = 4$$

a = 0,25 und b = -2 und c = 4 in I eingesetzt:

$$64 * 0,25 + 16 * (-2) + 4 * 4 + d = 0$$

$$16 - 32 + 16 + d = 0$$

$$d = 0$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = 0,25x^3 - 2x^2 + 4x}$$

