

Steckbriefaufgaben Aufgabe 55

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch (2|2), (3|9) und hat in (1|1) einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

5 Bedingungen (eine mehr als nötig):

1. Geht durch den Punkt (2|2) bedeutet:

$$f(2) = 2 \rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 2 \rightarrow$$

$$8a + 4b + 2c + d = 2 \quad \text{I}$$

2. Geht durch den Punkt (3|9) bedeutet:

$$f(3) = 9 \rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 9 \rightarrow$$

$$27a + 9b + 3c + d = 9 \quad \text{II}$$

3. Hat in (1|1) einen Wendepunkt bedeutet erstens:

$$f(1) = 1 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 1 \rightarrow$$

$$a + b + c + d = 1 \quad \text{III}$$

4. Hat in (1|1) einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente bedeutet zweitens:

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad \text{IV}$$

5. Hat in (1|1) einen Wendepunkt bedeutet drittens:

$$f''(1) = 0 \rightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \quad \text{V}$$

$$\text{III} \cdot (-1) + \text{I}$$

$$-a - b - c - d = -1$$

$$\underline{8a + 4b + 2c + d = 2}$$

$$7a + 3b + c = 1 \quad \text{VI}$$

$$\text{III} * (-1) + \text{II}$$

$$\begin{array}{r} -a - b - c - d = -1 \\ \underline{27a + 9b + 3c + d = 9} \\ 26a + 8b + 2c = 8 \end{array} \quad \text{VII}$$

$$\text{IV} * (-1) + \text{VI}$$

$$\begin{array}{r} -3a - 2b - c = 0 \\ \underline{7a + 3b + c = 1} \\ 4a + b = 1 \end{array} \quad \text{VIII}$$

$$\text{IV} * (-2) + \text{VII}$$

$$\begin{array}{r} -6a - 4b - 2c = 0 \\ \underline{26a + 8b + 2c = 8} \\ 20a + 4b = 8 \end{array} \quad \text{IX}$$

$$\text{VIII} * (-4) + \text{IX}$$

$$\begin{array}{r} -16a - 4b = -4 \\ \underline{20a + 4b = 8} \\ 4a = 4 \quad | :4 \end{array}$$

$$a = 1$$

$a = 1$ in VIII eingesetzt:

$$4 * 1 + b = 1$$

$$4 + b = 1 \quad | -4$$

$$b = -3$$

$a = 1$ und $b = -3$ in IV eingesetzt:

$$3 * 1 + 2 * (-3) + c = 0$$

$$3 - 6 + c = 0$$

$$-3 + c = 0 \quad | +3$$

$$c = 3$$

$a = 1$ und $b = -3$ und $c = 3$ in III eingesetzt.

$$1 - 3 + 3 + d = 1$$

$$1 + d = 1 \quad | -1$$

$$d = 0$$

Überprüfung der 5. Bedingung:

$a = 1$ und $b = -3$ eingesetzt:

$$6 * 1 + 2 * (-3) = 0$$

$$6 - 6 = 0 \quad \text{wahre Aussage}$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

