

Steckbriefaufgaben Aufgabe 65

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat im Punkt (2|14) eine Wendetangente mit der Steigung 15 und eine Nullstelle bei $x = 1$. Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

4 Bedingungen:

1. Hat im Punkt (2|14) (dem Wendepunkt) eine Wendetangente mit der Steigung 15 bedeutet erstens:

$$f(2) = 14 \rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 14 \rightarrow$$

$$8a + 4b + 2c + d = 14 \quad \text{I}$$

2. Hat im Punkt (2|14) (dem Wendepunkt) eine Wendetangente mit der Steigung 15 bedeutet zweitens:

$$f''(2) = 0 \rightarrow 6a \cdot 2 + 2b = 0 \rightarrow 12a + 2b = 0 \quad \text{II}$$

3. Hat im Punkt (2|14) (dem Wendepunkt) eine Wendetangente mit der Steigung 15 bedeutet drittens:

$$f'(2) = 15 \rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 15 \rightarrow 12a + 4b + c = 15 \quad \text{III}$$

4. Hat eine Nullstelle bei $x = 1$ bedeutet:

$$f(1) = 0 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \rightarrow$$

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{IV}$$

$$\text{I} + \text{IV} \cdot (-1)$$

$$8a + 4b + 2c + d = 14$$

$$\underline{- a - b - c - d = 0}$$

$$7a + 3b + c = 14 \quad \text{V}$$

$$\text{III} + \text{V} \cdot (-1)$$

$$\begin{array}{r} 12a + 4b + c = 15 \\ - 7a - 3b - c = - 14 \\ \hline 5a + b = 1 \end{array} \quad \text{VI}$$

$$\text{II} + \text{VI} * (-2)$$

$$\begin{array}{r} 12a + 2b = 0 \\ - 10a - 2b = - 2 \\ \hline 2a = - 2 \quad | :2 \end{array}$$

$$a = - 1$$

a = - 1 un VI eingesetzt:

$$5 * (-1) + b = 1$$

$$-5 + b = 1 \quad | +5$$

$$b = 6$$

a = - 1 und b = 6 in III eingesetzt.

$$12 * (-1) + 4 * 6 + c = 15$$

$$- 12 + 24 + c = 15$$

$$12 + c = 15 \quad | -12$$

$$c = 3$$

a = - 1 und b = 6 und c = 3 in I eingesetzt:

$$8 * (-1) + 4 * 6 + 2 * 3 + d = 14$$

$$- 8 + 24 + 6 + d = 14$$

$$22 + d = 14 \quad | -22$$

$$d = - 8$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = - x^3 + 6x^2 + 3x - 8}$$

