Steckbriefaufgaben Aufgabe 75

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades wechselt bei $x = 1$ das Vorzeichen, berührt bei $x = 2$ die x-Achse und geht durch den Punkt (3|4). Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

4 Bedingungen:

1. Wechselt bei $x = 1$ das Vorzeichen bedeutet:

$f(1) = 0 \dashrightarrow a * 1^3 + b * 1^2 + c * 1 + d = 0 \dashrightarrow a + b + c + d = 0$ I

2 Berührt bei $x = 2$ die x-Achse bedeutet zum einen:

$f(2) = 0 \dashrightarrow a * 2^3 + b * 2^2 + c * 2 + d = 0 \dashrightarrow$

$8a + 4b + 2c + d = 0$ II

3. Berührt bei $x = 2$ die x-Achse bedeutet zum anderen:

$f'(2) = 0 \dashrightarrow 3a * 2^2 + 2b * 2 + c = 0 \dashrightarrow 12a + 4b + c = 0$ III

4. Geht durch den Punkt (3|4) bedeutet:

$f(3) = 4 \dashrightarrow a * 3^3 + b * 3^2 + c * 3 + d = 4 \dashrightarrow$

$27a + 9b + 3c + d = 4$ IV

I (-1) + II

$$\begin{array}{l} -a - b - c - d = 0 \\ \underline{8a + 4b + 2c + d = 0} \\ \quad 7a + 3b + c = 0 \end{array}$$ V

I * (-1) + IV

$$\begin{array}{l} -a - b - c - d = 0 \\ \underline{27a + 9b + 3c + d = 4} \\ \quad 26a + 8b + 2c = 4 \end{array}$$ VI

$V * (-1) + III$

$$\begin{array}{r} -7a - 3b - c = 0 \\ \underline{12a + 4b + c = 0} \\ 5a + b = 0 \end{array} \qquad VII$$

$III * (-2) + VI$

$$\begin{array}{r} -24a - 8b - 2c = 0 \\ \underline{26a + 8b + 2c = 4} \\ 2a = 4 \mid :2 \end{array}$$

$$a = 2$$

$a = 2$ in VII eingesetzt:

$$5 * 2 + b = 0$$

$$10 + b = 0 \mid -10$$

$$b = -10$$

$a = 2$ und $b = -10$ in V eingesetzt.

$$7 * 2 + 3 * (-10) + c = 0$$

$$14 - 30 + c = 0$$

$$-16 + c = 0 \quad \mid +16$$

$$c = 16$$

$a = 2$ und $b = -10$ und $c = 16$ in I eingesetzt:

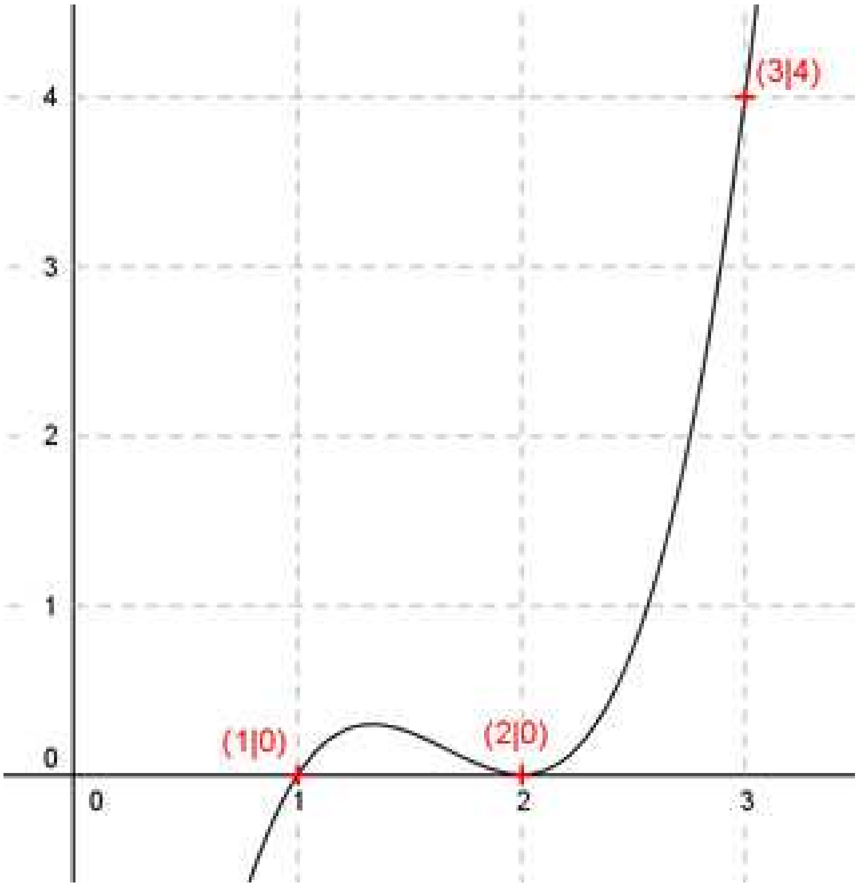
$$2 - 10 + 16 + d = 0$$

$$8 + d = 0 \mid -8$$

$$d = -8$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$\mathbf{f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x - 8}$$



Alternative Rechnung:

Der Punkt (1|0) ist eine Nullstelle, der Berührpunkt (2|0) eine doppelte. Sie können als Linearfaktoren $(x - 1)$ und $(x - 2)^2$ geschrieben werden.

$f(x) = a(x - 1)(x - 2)^2$

$f(3) = 4$ wegen Punkt (3|4) auf dem Graphen

$4 = a(3 - 1)(3 - 2)^2$

$4 = a * 2 \mid :2$

$a = 2$

$f(x) = 2(x - 1)(x - 2)^2$

$f(x) = 2(x - 1)(x^2 - 4x + 4)$

$f(x) = 2(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

$\mathbf{f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x - 8}$