

Steckbriefaufgaben Aufgabe 81

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades berührt im Punkt $(2|0)$ die x-Achse, hat im Punkt $(0|0)$ einen Wendepunkt, und die Wendetangente schneidet die x-Achse unter einem Winkel von 45° . Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 4. Grades:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

5 Bedingungen:

1. Berührt im Punkt $(2|0)$ die x-Achse bedeutet zum einen:

$$f(2) = 0 \rightarrow a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = 0 \rightarrow$$

$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 0 \quad \text{I}$$

2. Berührt im Punkt $(2|0)$ die x-Achse bedeutet zum anderen:

$$f'(2) = 0 \rightarrow 4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 + d = 0 \rightarrow$$

$$32a + 12b + 4c + d = 0 \quad \text{II}$$

3. Hat im Punkt $(0|0)$ einen Wendepunkt bedeutet zum einen:

$$f(0) = 0 \rightarrow a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0 \rightarrow e = 0$$

4. Hat im Punkt $(0|0)$ einen Wendepunkt bedeutet zum anderen:

$$f''(0) = 0 \rightarrow 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0 \rightarrow 2c = 0 \quad | :2 \rightarrow c = 0$$

5. Die Wendetangente schneidet die x-Achse unter einem Winkel von 45° bedeutet, $\tan 45^\circ = 1 \rightarrow$ Steigung der Tangente = 1:

$$f'(0) = 1 \rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 1 \rightarrow d = 1$$

I * (-2) + II (c = 0 und d = 1 und e = 0 eingesetzt):

$$- 32a - 16b - 4 = 0$$

$$\underline{32a + 12b + 1 = 0}$$

$$- 4b - 3 = 0 \quad | +3$$

$$-4b = 3 \mid :(-4)$$

$$b = -3/4 = -0,75$$

$b = -0,75$ und $c = 0$ und $d = 1$ und $e = 0$ in I eingesetzt:

$$16a + 8 * (-0,75) + 2 * 1 = 0$$

$$16a - 6 + 2 = 0$$

$$16a - 4 = 0 \mid +4$$

$$16a = 4 \mid :16$$

$$a = 4/16 = 1/4 = 0,25$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0,25x^4 - 0,75x^3 + x$$

