

Steckbriefaufgaben Aufgabe 87

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Wendepunkt $(0|0)$ und an der Stelle $x = 6$ waagerechte Tangenten und schneidet die x-Achse an einer weiteren Stelle mit der Steigung -8 . Wie lautet seine Funktionsgleichung?

Allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 4. Grades:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

5 Bedingungen:

1. Hat im Wendepunkt $(0|0)$ bedeutet zum einen:

$$f(0) = 0 \rightarrow a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0 \rightarrow e = 0$$

2. Hat im Wendepunkt $(0|0)$ bedeutet zum anderen:

$$f''(0) = 0 \rightarrow 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0 \rightarrow 2c = 0 \mid :2 \rightarrow c = 0$$

3. Hat im Wendepunkt $(0|0)$ eine waagerechte Tangente bedeutet:

$$f'(0) = 0 \rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0 \rightarrow d = 0$$

4. Hat an der Stelle $x = 6$ eine waagerechte Tangente bedeutet: ($c = 0$ und $d = 0$ eingesetzt)

$$f'(6) = 0 \rightarrow 4a \cdot 6^3 + 3b \cdot 6^2 = 0 \rightarrow 864a + 72b = 0 \mid - 864a$$

$$\rightarrow 72b = - 864a \mid :72$$

$$b = - \frac{864}{72} = - 8a$$

5. Schneidet die x-Achse mit der Steigung -8 bedeutet zum einen:

$$f'(x) = - 8 \text{ (} c = 0 \text{ und } d = 0 \text{ und } e = 0 \text{ eingesetzt)}$$

$$4ax^3 + 3bx^2 = - 8 \text{ (} b = - 8a \text{ eingesetzt)}$$

$$4ax^3 - 24ax^2 = - 8$$

$$a(4x^3 - 24x^2) = -8 \quad | : (4x^3 - 24x^2)$$

$$a = \frac{-8}{4x^3 - 24x^2}$$

5. Schneidet die x-Achse mit der Steigung - 8 bedeutet zum anderen:

$$f(x) = 0 \rightarrow ax^4 + bx^3 = 0 \quad (a = \frac{-8}{4x^3 - 24x^2} \text{ und } b = -8a \text{ eingesetzt})$$

$$\frac{-8x^4}{4x^3 - 24x^2} - 8x^3 * \frac{-8}{4x^3 - 24x^2} = 0 \quad | * (4x^3 - 24x^2)$$

$$-8x^4 + 64x^3 = 0$$

$$-x^3(x - 8) = 0 \rightarrow 2 \text{ Fälle}$$

1. Fall $-x^3 = 0 \rightarrow x_{1,2,3} = 0$ Sattelpunkt

2. Fall $(x - 8) = 0 \rightarrow x_4 = 8$

Somit (c = 0 und d = 0 eingesetzt)

$$f'(8) = -8 \rightarrow 4a * 8^3 + 3b * 8^2 = -8 \quad (b = -8a \text{ eingesetzt})$$

$$2048a + 3 * (-8a) * 64 = -8$$

$$2048a - 1536a = -8$$

$$512a = -8 \quad | :512$$

$$a = \frac{8}{512} = \frac{1}{64}$$

$$b = -8a = -8 * \left(-\frac{1}{64}\right) = \frac{1}{8} = 0,125$$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\left(\frac{1}{64}\right)x^4 + 0,125x^3$$

