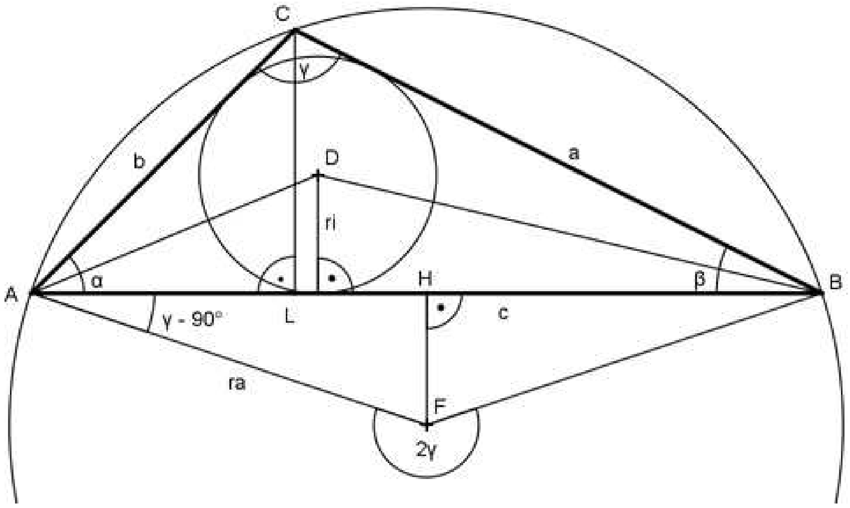
Trigonometrie Aufgabe 141

Berechnen Sie den Umkreisradius r_a und den Inkreisradius r_i eines Dreiecks, wenn a = 32,1 m, b = 13,2 m und c = 39,4 m.



Im Dreieck ABC:

Es liegt der Fall SSS (Seite a, Seite b, Seite c) vor. Der Fall hat dann eine eindeutige Lösung, wenn a + b > c, a + c > b und b + c > a ist.

Cosinussatz:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos \gamma \mid + 2 * a * b * \cos \gamma$

$c^2 + 2 * a * b * \cos \gamma = a^2 + b^2 \mid -c^2$

$2 * a * b * \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 \mid :2 * a * b$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 * a * b} = \frac{32{,}1^2\ m^2 + 13{,}2^2\ m^2 - 39{,}4^2\ m^2}{2 * 32{,}1\ m * 13{,}2\ m} = -0{,}4103 \text{ -->}$$

$\gamma = 114{,}2°$

Sinussatz:

$$\frac{c}{\sin 114{,}2°} = \frac{a}{\sin \alpha} \mid * \sin \alpha$$

$$a = \frac{c * \sin \alpha}{\sin 114{,}2°} \mid * \sin 114{,}2$$

$a * \sin 114{,}2 = c * \sin \alpha \mid :c$

$$\sin \alpha = \frac{a * \sin 114{,}2}{c} = \frac{32{,}1\text{ m} * 0{,}9121}{39{,}4\text{ m}} = 0{,}7431 \rightarrow \alpha = 48°$$

$\beta = 180 - \alpha - \gamma = 180° - 48° - 114{,}2° = 17{,}8°$

Im Dreieck AFH:

$$\text{Winkel bei F} = \frac{380° - 2 * \gamma}{2} = 180° - \gamma$$

Winkel bei A = $90° - (180° - \gamma) = \gamma - 90° = 114{,}2° - 90° = 24{,}2°$

$$\cos 24{,}2° = \frac{c/2}{r_a} \mid *r_a$$

$r_a * \cos 24{,}2° = c/2$

$$\mathbf{r_a =} \frac{c/2}{\cos 24{,}2°} = \frac{39{,}4/2\text{ m}}{0{,}9121} = \mathbf{21{,}6\text{ m}}$$

Im Dreieck AED:

$$\tan \alpha/2 = \frac{r_i}{AE} \mid *AE$$

$r_i = \tan \alpha/2 * AE$

Im Dreieck EBD:

$$\tan \beta/2 = \frac{r_i}{c - AE} \mid *(c - AE)$$

$r_i = \tan \beta/2 * (c - AE)$

Gleichgesetzt:

$\tan \alpha/2 * AE = \tan \beta/2 * (c - AE)$

$\tan 24° * AE = \tan 8{,}9° * c - \tan 8{,}9° * AE \mid +\tan 8{,}9° * aE$

$\tan 24° * AE + \tan 8{,}9° * AE = c * \tan 8{,}9°$

$AE * (\tan 24° + \tan 8{,}9°) = c * \tan 8{,}9° \mid :(\tan 24° + \tan 8{,}9°)$

$$AE = \frac{c * \tan 8{,}9°}{\tan 24° + \tan 8{,}9°} = \frac{39{,}4\ m * 0{,}1566}{0{,}4452 + 0{,}1566} = 10{,}3\ m$$

r_i = $AE * \tan \alpha/2 = 10{,}3\ m * \tan 24° = 10{,}3\ m * 0{,}4452 =$ **4,6 m**

oder

Im Dreieck ALC:

$$\sin \alpha = \frac{LC}{b} \mid *LC$$

$LC = b * \sin 48° = 13{,}2\ m * 0{,}7431 = 9{,}8\ m$ = Höhe des Dreiecks ABC

$$A = \frac{c * h}{2} = \frac{39{,}4\ m * 9{,}8\ m}{2} = 193{,}1\ m^2$$

$$A = r_i * \frac{a + b + c}{2} \mid *2$$

$2 * A = r_i * (a + b + c) \mid (a + b + c)$

$$r_i = \frac{A * 2}{a + b + c} = \frac{193{,}1\ m^2 * 2}{32{,}1\ m + 13{,}2\ m + 39{,}4\ m} = \mathbf{4{,}6\ m}$$