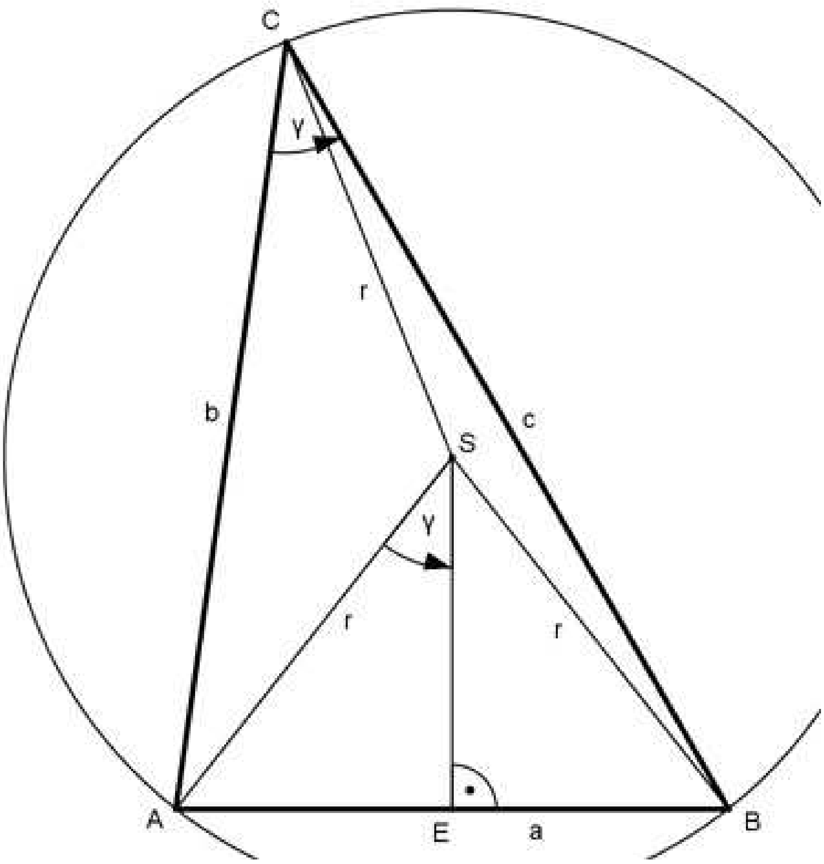
Trigonometrie Aufgabe 169

Wie groß sind die Oberfläche O und das Volumen V einer Dreieckspyramide mit 10 cm langen Seitenkanten, wenn die Seiten der Grundfläche a = 5 cm, b = 7 cm und c = 8 cm lang sind?
Wie groß ist der Winkel α, den die Seitenkanten mit der Grundfläche bilden?
Wie groß ist der Winkel β, den die Grundfläche mit der Seitenfläche über a bildet?

Grundfläche der Pyramide:



Die Projektionen der Seitenkanten auf die Grundfläche müssen gleich lang sein, da auch die Seitenkanten s gleich lang sind. Dies ist dann der Fall, wenn die Spitze S der Pyramide über dem Mittelpunkt des Umkreises liegt. Die Projektionen sind dann gleich dem Umkreisradius r.

Im Dreieck ABC:

Fall SSS:

Cosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos\gamma \mid +2 * b * c * \cos\gamma$

$a^2 + 2 * b * c * \cos\gamma = b^2 + c^2 \mid -a^2$

$2 * b * c * \cos\gamma = b^2 + c^2 - a^2 \mid :2 * b * c$

$$\cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 * b * c} = \frac{7^2\ cm^2 + 8^2\ cm^2 - 5^2\ cm^2}{2 * 7\ cm * 8\ cm} = 0{,}7857$$

$\gamma = 38{,}2°$

Der Umfangswinkel γ über der Sehne AB = a ist gleich dem halben

Mittelpunktswinkel bei S.

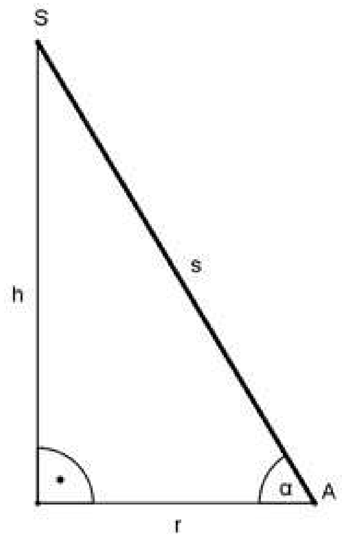
Im Dreieck AES:

$$\sin\gamma = \frac{a/2}{r} \mid *r$$

$r * \sin\gamma = a/2 \mid *2$

$2 * r * \sin\gamma = a \mid :2 * \sin\gamma$

$$r = \frac{a}{2 * \sin\gamma} = \frac{5\ cm}{2 * \sin 38{,}2°} = \frac{5\ cm}{2 * 0{,}6184} = 4\ cm$$



Höhe der Pyramide: (Schnitt entlang der Strecke AS)

Satz von Pythagoras:

$s^2 = r^2 + h^2 \mid -r^2$

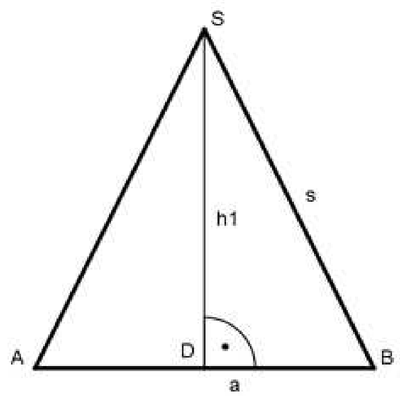
$h^2 = s^2 - r^2$

$h^2 = 10^2\ cm^2 - 4^2\ cm^2 = 84\ cm^2 \mid \sqrt{}$

$h = 9{,}2\ cm$

Neigungswinkel α der Seitenkante S zur Grundfläche:

$$\sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{9{,}2\ cm}{10\ cm} = 0{,}92 \dashrightarrow \boldsymbol{\alpha = 66{,}9°}$$



Höhen der Seitenflächen:

Höhe über AB:

Im Dreieck DBS:

Satz von Pythagoras:

$s^2 = h_1^2 + (a/2)^2 \mid -(a/2)^2$

$h_1^2 = s^2 - (a/2)^2$

$h_1^2 = 10^2\ cm^2 - (5/2)^2\ cm^2 = 93{,}75\ cm^2 \mid\sqrt{}$

$h_1 = 9{,}7\ cm$

Höhe über AC:

$h_2^2 = 100^2\ cm^2 - (7/2)^2\ cm^2 = 87{,}75\ cm^2 \mid\sqrt{}$

$h_2 = 9{,}4\ cm$

Höhe über BC:

$h_3^2 = 100^2\ cm^2 - (8/2)^2\ cm^2 = 84\ cm^2 \mid\sqrt{}$

$h_3 = 9{,}2\ cm$

O = Seitenfläche 1 + Seitenfläche 2 + Seitenfläche 3 + Grundfläche

$$O = \frac{a * h_1}{2} + \frac{b * h_2}{2} + \frac{c * h_3}{2} + \frac{b * c * \sin\gamma}{2}$$

$$O = \frac{5\ cm * 9{,}7\ cm}{2} + \frac{7\ cm * 9{,}4\ cm}{2} + \frac{8\ cm * 9{,}2\ cm}{2} + \frac{7\ cm * 8\ cm * \sin\gamma}{2}$$

$O = 24{,}25\ cm^2 + 32{,}9\ cm^2 + 36{,}8\ cm^2 + 28\ cm^2 * \sin 38{,}2°$

$O = 24{,}25\ cm^2 + 32{,}9\ cm^2 + 36{,}8\ cm^2 + 28\ cm^2 * 0{,}6184$

$O = 111{,}3\ cm^2$

$$\mathbf{V} = \frac{b * c * \sin\gamma * h}{2 * 3} = \frac{7\ cm * 8\ cm * 0{,}6184 * 9{,}2\ cm}{6} = \mathbf{53{,}1\ cm^3}$$

Neigungswinkel β der Seitenfläche über a zur Grundfläche:

$$\sin \beta = \frac{h}{h_1} = \frac{9{,}2\text{ cm}}{9{,}7\text{ cm}} = 0{,}9485 \dashrightarrow \boldsymbol{\beta = 71{,}5°}$$