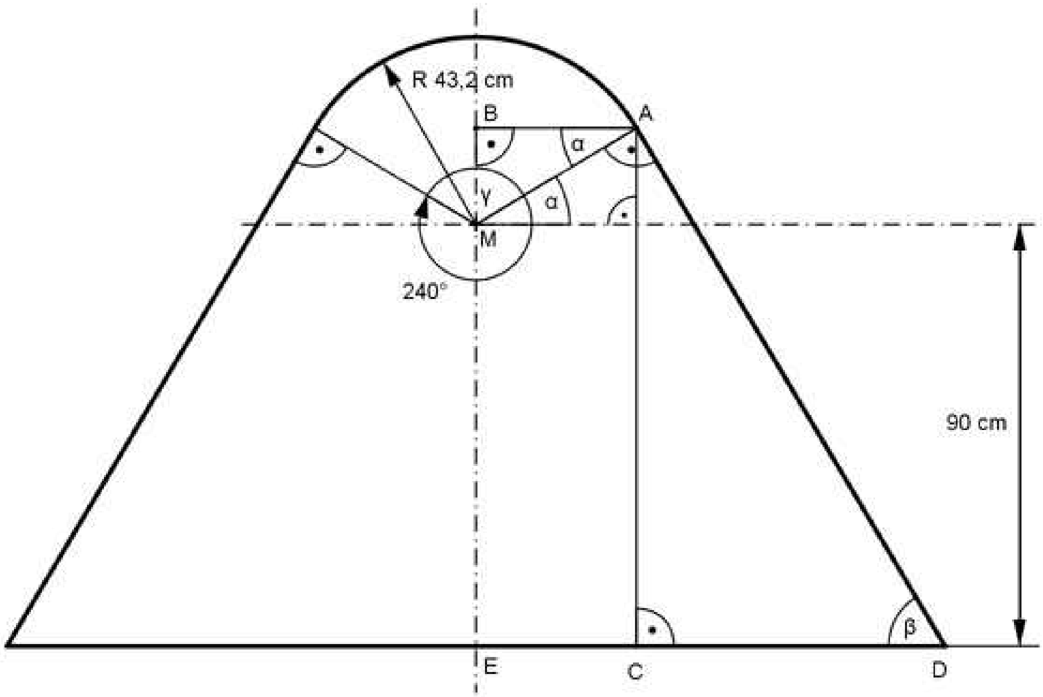
Volumenberechnungen Aufgabe 390

Wie groß sind das Volumen V. die Oberfläche O und die Fläche A des Achsenschnittes des Ziersteins aus Marmor?



$V = V_{Kegelstumpf} + V_{Kugelabschnitt}$

Im Dreieck MAB gilt:

$MA = r_{Kugel}$

$$\alpha = \frac{240° - 180°}{2} = 30° = \sphericalangle MAB \text{ (Z- Winkel)}$$

$$\cos \alpha = \frac{BA}{MA} \quad | \cdot MA$$

$BA = MA * \cos \alpha = MA * \cos 30° = 43{,}2 \text{ cm} * 0{,}866 = 37{,}4 \text{ cm}$

$$\sin \alpha = \frac{MB}{MA} \quad | \cdot MA$$

$MB = MA * \sin \alpha = MA * \sin 30° = 43{,}2 \text{ cm} * 0{,}5 = 21{,}6 \text{ cm}$

Höhe des Kugelabschnitts $h_{KA} = r_{Kugel} - MB = 43{,}2 \text{ cm} - 21{,}6 \text{ cm}$

$h_{KA} = 21{,}6 \text{ cm}$

$$V_{Kugelabschnitt} = \frac{\pi}{3} * h_{KA}^2 * (3 * r_{Kugel} - h_{KA})$$

$$V_{Kugelabschnitt} = \frac{\pi}{3} * 21{,}6^2 * (3 * 43{,}2 - 21{,}6)\ cm^3 = 52\ 740\ cm^3$$

$V_{Kugelabschnitt} = 0{,}053\ m^3$

BA = r_1 = oberer Radius des Kegelstumpfes

$\measuredangle$ MAC = 60°

$\measuredangle$ CAD = 30° --> β = 60°

EM = 90 cm = 0,9 m

MB = 21,6 cm = 0,216 m

EB = EM + MB = 0,9 m + 0,216 m = 1,116 m = AC = Höhe des

Kegelstumpfes = h_{KS}

Im Dreieck ACD gilt:

$$\tan \beta = \frac{AC}{CD} \mid * CD$$

$CD * \tan \beta = AC \mid :\tan \beta$

$$CD = \frac{AC}{\tan \beta} = \frac{AC}{\tan 60°} = \frac{1{,}116\ m}{1{,}732} = 0{,}644\ m$$

EC = BA = 37,4 cm = 0,374 m

ED = EC + CD = 0,374 m + 0,644 m = 1,018 m = unterer Radius des

Kegelstumpfes = r_2

$$V_{Kegelstumpf} = \frac{\pi}{3} * h_{KS} * (r_1^2 + r_1 * r_2 + r_2^2)$$

$$V_{Kegelstumpf} = \frac{\pi}{3} * 1{,}116 * (0{,}374^2 + 0{,}374 * 1{,}018 + 1{,}018^2)\ m^3$$

$$V_{Kegelstumpf} = 1{,}819\ m^3$$

V = $1{,}819\ m^3 + 0{,}053\ m^3 =$ **$1{,}87\ m^3$**

O = Kegelstumpfmantelfläche M_{KS} + Kappenfläche K + Grundkreisfläche G

Im Dreieck ACD gilt:

$$\sin\beta = \frac{AC}{DA} \quad | *DA$$

$$DA * \sin\beta = AC \quad | :\sin\beta$$

$$DA = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin 60°} = \frac{1{,}116\ m}{0{,}866} = 1{,}29\ m$$

$$M_{KS} = \pi * DA * (r_1 + r_2) = \pi * 1{,}29 * (0{,}374 + 1{,}018)\ m^2 = 5{,}64\ m^2$$

$$K = 2 * \pi * r_{Kugel} * h_{KA} = 2 * \pi * 0{,}432\ m * 0{,}216\ m = 0{,}586\ m^2$$

$$G = \pi * r_2^2 = \pi * 1{,}018^2\ m^2 = 3{,}254\ m^2$$

O = $5{,}64\ m^2 + 0{,}586\ m^2 + 3{,}254\ m^2 =$ **$9{,}48\ m^2$**

A = Trapezfläche T + Kreisausschnittfläche K - Dreieckfläche D

$$T = 2 * \frac{r_1 + r_2}{2} * h_{KS} = 2 * \frac{0{,}374\ m + 1{,}018\ m}{2} * 1{,}116\ m = 1{,}55\ m^2$$

Mittelpunktswinkel $\gamma = 360° - 240° = 120°$

$$K = \frac{\pi * r_{Kugel}^2 * \gamma}{360°} = \frac{\pi * 0{,}432^2\ m^2 * 120°}{360°} = 0{,}195\ m^2$$

$$D = \frac{2 * BA * MB}{2} = 0{,}374\ m * 0{,}216\ m = 0{,}081\ m^2$$

A = $1{,}55\ m^2 + 0{,}195\ m^2 - 0{,}081\ m^2 =$ **$1{,}66\ m^2$**